



МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

О. А. Гаврилов, И. В. Владимиров, А. Д. Багров

Московский
государственный университет
им. М.В. Ломоносова

О. А. Гаврилов, И. В. Владимиров, А. Д. Багров

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Монография



Санкт-Петербург
Издательский дом «Сциентиа»
2022

УДК 517.958:519.6
ББК 22.311:22.19
Г12

Рецензент:

Рыбаков А.А. — к.ф.-м.н.,
в.н.с. Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН

Гаврилов, Олег Алексеевич

Г12 Метод решения задачи теплопроводности со специальным нелокальным условием : монография / О. А. Гаврилов, И. В. Владимиров, А. Д. Багров ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. — Электронные данные. — Санкт-Петербург : Сциентиа, 2022. — 8,04 Мб ; 45 с. — Режим доступа: <https://scientia-pub.org/index.php/Sci/catalog/book/34> — Загл. с экрана.

ISBN: 978-5-6048667-2-6. — DOI: 10.32415/scientia_978-5-6048667-2-6.

В монографии рассматриваются методы решения одного класса нелокальных задач теплопроводности. Требуется восстановить решение при помощи дополнительного условия, связывающего значения неизвестной функции в начальный и финальный моменты времени. Проведён теоретический анализ поставленной нелокальной задачи и изучен вопрос её корректности. Составлен специальный алгоритм численного решения, использующий принцип сжимающего оператора. Показано, что определяющим свойством является возможность обобщения данного метода на случай уравнения с произвольным положительным коэффициентом, задающим боковой теплообмен. При помощи программного пакета MATLAB разработана компьютерная модель и проведена серия вычислительных экспериментов, показавших высокую надёжность алгоритма. Программная реализация модели размещена по адресу: <https://github.com/lovgager/heat>

УДК 517.958:519.6
ББК 22.311:22.19

ISBN: 978-5-6048667-2-6
DOI: 10.32415/scientia_978-5-6048667-2-6

© Гаврилов О.А., 2022 г.
© Владимиров И.В., 2022 г.
© Багров А.Д., 2022 г.
© МГУ им. М.В. Ломоносова, 2022 г.
© Оформление. ООО ИД «Сциентиа», 2022 г.

Оглавление

1	Введение и описание работы	4
2	Постановка и исследование задачи	6
2.1	Общая постановка задачи	6
2.2	Метод Фурье для частного случая	7
2.3	Операторный метод для частного случая	10
2.4	Комбинированный метод	14
2.5	Обобщение операторного метода	17
2.6	Пример метода Фурье для общего случая	18
3	Численная реализация алгоритмов	20
3.1	Разностная схема для частного случая	20
3.2	Сравнение двух разностных схем для общего случая	22
4	Примеры	26
4.1	Пример 1	26
4.2	Пример 2	28
4.3	Пример 3	30
4.4	Пример 4	31
4.5	Пример 5	33
4.6	Пример 6	35
4.7	Пример 7	37
4.8	Пример 8	39
5	Заключение	41
	Литература	43

Глава 1

Введение и описание работы

В современной математике важную роль играет активно развивающаяся теория обратных и некорректно поставленных задач. В частности, многие прикладные проблемы сводятся к исследованию и интерпретации наблюдений, полученных в ходе некоторого эксперимента: по измеренным в его результате косвенным проявлениям необходимо сделать выводы о свойствах объекта или процесса. Другими словами, требуется определить причины, если известны полученные в результате наблюдений следствия. Подобные задачи естественно называть обратными. Их решение, связанное с обращением причинно-следственных связей, может быть сопряжено со значительными трудностями. Для успешного результата активно применяются математические методы.

Понятие обратных задач тесно связано с понятием некорректных задач. Последнее было сформулировано Ж. Адамаром в связи с исследованием некоторых уравнений математической физики [1]. Решение всякой количественной задачи состоит в нахождении заранее неизвестной величины z по заданной исходной информации u и может быть записано в виде

$$z = R(u). \quad (1.1)$$

При этом обычно предполагается, что z и u являются элементами метрических пространств Z и U соответственно. Задача (1.1) называется *корректно поставленной на паре пространств Z, U* , если выполнены условия:

- 1) для всякого элемента $u \in U$ существует решение $z \in Z$;
- 2) решение (если существует) определяется однозначно;
- 3) решение задачи z непрерывно зависит от исходных данных u .

Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному из этих условий, называются *некорректно поставленными*. Условия 1) и 2) характеризуют математическую

определённость задачи, а условие 3) — физическую детерминированность (иначе сложно дать какую-либо интерпретацию задачи, если сколь угодно малым возмущениям начальных данных могут соответствовать большие изменения решения), а также возможность применения вычислительных методов в случае приближённых исходных данных.

Обратные задачи, возникающие при обработке результатов экспериментов, как правило, являются некорректно поставленными. Следовательно, требуется дополнительный анализ вопросов, связанных с существованием, единственностью и устойчивостью решения. Методы такого анализа широко развиваются в теории обратных и некорректно поставленных задач.

Большое значение на практике имеет некорректная параболическая задача с обратным временем [2]. Связанная с ней нелокальная задача рассматривается в работе [3]; там же обсуждается метод регуляризации для одномерной задачи теплопроводности. Похожая задача с нелокальным условием более общего вида рассматривалась в [4]. Некоторый предельный случай (расширение отрезка до всей числовой прямой) исследован в работе [5]. В данной выпускной квалификационной работе рассматривается задача для одномерного уравнения теплопроводности с боковым теплообменом и нелокальным условием по временной переменной. Предложены конструктивные методы решения, проведено теоретическое исследование по их сравнению. Разработаны формальные алгоритмы решения с использованием вычислительных методов. Для их реализации написана корректно работающая программа на языке *MATLAB*. Проведено множество вычислительных экспериментов.

Глава 2

Постановка и исследование задачи

2.1 Общая постановка задачи

Рассмотрим следующую одномерную задачу для уравнения теплопроводности с боковым теплообменом на отрезке с однородными краевыми условиями первого рода, заданную в течение ограниченного промежутка времени:

$$u_t = a^2 u_{xx} - c(x)u, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (2.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.2)$$

$$\alpha u(x, 0) + (1 - \alpha)u(x, T) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.3)$$

Здесь и далее считаем, что

- $a^2 > 0$ – коэффициент теплопроводности,
- $T > 0$ – продолжительность измерений,
- $l > 0$ – длина стержня,
- $u = u(x, t) \in C^{2,1}([0, l] \times [0, T])$,
- $c(x)$ – коэффициент бокового теплообмена в точке $x \in (0, l)$,
- $\alpha \in (0, 1)$ – заданное число,
- $\psi(x)$ – заданная функция на отрезке $x \in [0, l]$,
- и, кроме того, выполнены условия согласования: $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Значения параметров a, l, T и функция $\psi(x)$, $x \in [0, l]$, предполагаются известными; требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям (2.1)-(2.3).

Физически условие (2.3) означает, что в каждой точке стержня известно среднее взвешенное температуры в начальный и конечный моменты времени. В дальнейшем будем называть это условие нелокальным, а задачу (2.1)-(2.3) — *нелокальной задачей теплопроводности*.

2.2 Метод Фурье для частного случая

Интерес представляет задача с классическим уравнением теплопроводности, то есть с нулевым коэффициентом $c(x)$. Сначала проведём исследование для такой задачи.

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (2.4)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.5)$$

$$\alpha u(x, 0) + (1 - \alpha)u(x, T) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.6)$$

Воспользуемся методом Фурье (разделения переменных) и будем искать частное решение в виде $u(x, t) = X(x)T(t)$. Подставим это выражение в (2.4):

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \quad (2.7)$$

Так как в левой части равенства стоит функция от t , в правой — от x , то они обе тождественно равны некоторой константе, которую мы обозначили через $(-\lambda)$. Из правого равенства и из краевых условий (2.5) получаем для $X(x)$ задачу Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in [0, l], \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{cases}$$

Известно (см., например, [6]), что её решение следующее:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Теперь для каждого n решим задачу (2.7) относительно $T(t)$.

$$T'_n(t) = -\lambda_n a^2 T_n(t),$$

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n a^2 t} = C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}, \quad C_n = \text{const}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Получаем частное решение (2.4)-(2.5):

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi nx}{l}.$$

Из принципа суперпозиции следует, что любая линейная комбинация частных решений (2.4)-(2.5) тоже является решением. Теперь можем формально записать общее решение (2.4)-(2.5):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi nx}{l}. \quad (2.8)$$

Далее введём функцию

$$\varphi(x) \equiv u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi nx}{l}$$

и переобозначим $C_n = \varphi_n$, поскольку очевидно, что C_n представляют собой коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ по системе $\{\sin \frac{\pi nx}{l}\}$. Из условия (2.6)

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \alpha \varphi(x) + (1 - \alpha)u(x, T) = \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi nx}{l} + (1 - \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T} \sin \frac{\pi nx}{l} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi nx}{l}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\psi_n = \varphi_n \left(\alpha + (1 - \alpha)e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Представление (2.9) — не что иное, как разложение функции $\psi(x)$ в ряд Фурье на отрезке $[0, l]$. Коэффициенты этого разложения вычисляются по формуле

$$\psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Приравнивая правые части в (2.9) и (2.10), получаем формулу для вычисления коэффициентов Фурье неизвестной функции $\varphi(x)$:

$$\varphi_n = \left(\alpha + (1 - \alpha)e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T} \right)^{-1} \cdot \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.11)$$

Подставляем выражение (2.11) в формулу общего решения (2.8) и выписываем окончательный результат

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}}{\alpha + (1 - \alpha)e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T}} \sin \frac{\pi nx}{l} \cdot \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi \quad (2.12)$$

В силу условий на $\psi(x)$ ряд (2.12) сходится равномерно в прямоугольнике $\{(x, t) \in [0, l] \times [0, T]\}$, значит, можно поменять местами операторы суммирования и интегрирования (о почленном собственном интегрировании функциональных рядов см., например, [7]):

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t}}{\alpha + (1 - \alpha)e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 T}} \sin \frac{\pi n \xi}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} d\xi,$$

$$u(x, t) = \int_0^l K(x, t, \xi) \psi(\xi) d\xi, \quad (2.13)$$

$$K(x, t, \xi) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t}}{\alpha + (1 - \alpha)e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 T}} \sin \frac{\pi n \xi}{l} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (2.14)$$

$$(x, t, \xi) \in D = \{(x, t, \xi) \mid x, \xi \in [0, l], t \in [0, T]\}.$$

Так как в выражении (2.14) ряд состоит из непрерывных функций и сходится равномерно на множестве D , то функция $K(x, t, \xi)$ непрерывна этом множестве. Известно (см. [8]), что при таком условии задача вычисления интегрального оператора (2.13) является корректно поставленной. Это означает, что решение существует, единственно и устойчиво относительно входных данных. Отсюда следует, что и исходная задача (2.4-2.6) является корректной, поскольку она эквивалентна задаче вычисления (2.13).

В итоге вычислительный алгоритм нахождения приближённого решения задачи (2.4)-(2.6) по методу Фурье заключается в следующем:

1. Задаём количество слагаемых p . Чем больше это значение — тем выше точность вычислений.
2. Вычисляем первые p коэффициентов Фурье функции $\psi(x)$ на отрезке $[0, l]$:

$$\psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n = \overline{1, p}.$$

3. Составляем сумму

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{n=1}^p \psi_n \frac{e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t}}{\alpha + (1 - \alpha)e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 T}} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Это и есть приближение искомого решения.

2.3 Операторный метод для частного случая

Рассмотрим ту же задачу (2.4)-(2.6). Обозначим через $u(x, T; \varphi)$ решение «прямой» задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l \quad 0 < t < T, \quad (2.15)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2.16)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \quad (2.17)$$

взятое при $t = T$. Задачу (2.15)-(2.17) будем называть *классической*.

Введём оператор $\mathcal{B}_\alpha : L_2[0, l] \rightarrow L_2[0, l]$, зависящий от параметра α из задачи (2.4)-(2.6), такой что

$$(\mathcal{B}_\alpha \varphi)(x) = - \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) u(x, T; \varphi), \quad \varphi \in L_2[0, l]. \quad (2.18)$$

Очевидно, что \mathcal{B}_α — линейный оператор (при всех $\alpha \in (0, 1)$).

Запишем нелокальное условие (2.6) исходной задачи, приняв старое обозначение $u(x, 0) = \varphi(x)$. В данном случае $\varphi(x)$ — неизвестная функция, которую хотим найти, чтобы свести задачу (2.4)-(2.6) к классической задаче (2.15)-(2.17).

$$\alpha \varphi(x) + (1 - \alpha) u(x, T) = \psi(x), \quad x \in [0, l].$$

Заметим, что $u(x, T) \equiv u(x, T; \varphi) = - \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) (\mathcal{B}_\alpha \varphi)(x)$. Получаем операторное уравнение относительно неизвестной функции φ :

$$\varphi - \mathcal{B}_\alpha \varphi = \frac{\psi}{\alpha}. \quad (2.19)$$

Если представить его в виде $\varphi = \frac{\psi}{\alpha} + \mathcal{B}_\alpha \varphi$, то можем записать цепочку равенств для любого $N = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\psi}{\alpha} + \mathcal{B}_\alpha \left(\frac{\psi}{\alpha} + \mathcal{B}_\alpha \varphi \right) = \frac{\psi}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \mathcal{B}_\alpha \psi + \mathcal{B}_\alpha^2 \left(\frac{\psi}{\alpha} + \mathcal{B}_\alpha \varphi \right) = \dots = \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^N \mathcal{B}_\alpha^k \psi + \mathcal{B}_\alpha^{N+1} \varphi. \end{aligned}$$

Имеет смысл рассмотреть (пока формально) так называемый *ряд Неймана* — ряд из степеней оператора \mathcal{B}_α , действующих на ψ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^k \psi. \quad (2.20)$$

Утверждение 2.3.1. При $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ ряд Неймана (2.20) сходится по норме пространства $L_2[0, l]$.

Доказательство. Пусть $y \in L_2[0, l]$ — произвольная функция, тогда можем рассматривать её разложение в ряд Фурье на отрезке $[0, l]$ по системе синусов:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad x \in [0, l].$$

Справедливо равенство Парсеваля (см., например, [7]):

$$\|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2, \quad (2.21)$$

в котором норма понимается (здесь и далее) в смысле пространства $L_2[0, l]$. Выпишем решение задачи (2.15)-(2.17), где в начальном условии принято $\varphi = y$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (2.22)$$

По определению оператора \mathcal{B}_α выполнено равенство $(\mathcal{B}_\alpha y)(x) = -\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) u(x, T; y)$. Тогда с учётом (2.22)

$$(\mathcal{B}_\alpha y)(x) = -\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) u(x, T; y) = -\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \sum_{n=1}^{\infty} y_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Запишем равенство Парсеваля для этой функции:

$$\|\mathcal{B}_\alpha y\|^2 = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 e^{-2\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T}. \quad (2.23)$$

Из равенств (2.21), (2.23) очевидно, что $\|\mathcal{B}_\alpha y\| < \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \|y\|$, если $y \neq 0$. Значит,

$$\exists \|\mathcal{B}_\alpha\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y \neq 0} \frac{\|\mathcal{B}_\alpha y\|}{\|y\|} = b < \frac{1-\alpha}{\alpha} \leq 1,$$

так как по условию $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Получаем, что в этом случае линейный оператор \mathcal{B}_α ограничен, причём его норма строго меньше 1.

Далее $\forall N, m \in \mathbb{N}$ рассмотрим частичные суммы ряда (2.20) и воспользуемся критерием Коши (см. [7]):

$$\left\| \sum_{k=N}^{N+m} \mathcal{B}_\alpha^k \psi \right\| \leq \sum_{k=N}^{N+m} \|\mathcal{B}_\alpha^k \psi\| \leq \sum_{k=N}^{N+m} \|\mathcal{B}_\alpha\|^k \|\psi\| = \sum_{k=N}^{N+m} b^k \|\psi\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно, ряд Неймана (2.20) сходится по норме пространства $L_2[0, l]$, причём экспоненциально (со скоростью геометрической прогрессии).

Далее будем считать выполненным условие $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$. Тогда можем рассматривать $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^k \psi$ как элемент $L_2[0, l]$. Подставив выражение $\varphi = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^k \psi$ в левую часть уравнения (2.19), получим

$$\varphi - \mathcal{B}_\alpha \varphi = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^k \psi - \mathcal{B}_\alpha \left(\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^k \psi \right) = \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^k \psi - \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^{k+1} \psi \right) = \frac{1}{\alpha} \psi.$$

Здесь мы воспользовались тем, что линейный оператор \mathcal{B}_α ограничен, следовательно, непрерывен (см., например, [9]), то есть переводит всякую сходящуюся по норме последовательность в сходящуюся. Это значит, что можем менять местами \mathcal{B}_α и оператор бесконечного суммирования:

$$\mathcal{B}_\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^k \psi \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha (\mathcal{B}_\alpha^k \psi) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^{k+1} \psi.$$

Получаем, что функция

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^k \psi, \quad (2.24)$$

являющаяся сильным пределом ряда (2.20) в пространстве $L_2[0, l]$, действительно является решением операторного уравнения (2.19).

Далее из определения оператора \mathcal{B}_α следует заметить, что

$$\mathcal{B}_\alpha^k \psi = (-1)^k \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^k u(x, kT; \psi), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

То есть для нахождения степеней оператора \mathcal{B}_α достаточно решить задачу (2.15)-(2.17), в которой в качестве начального условия (2.17) берётся функция ψ , и в полученное решение последовательно подставлять значения $t = T, 2T, 3T, \dots$

Можем убедиться, что данный метод решения не противоречит предыдущему методу. Пусть $v(x, t)$ — решение (2.15)-(2.17) с начальным условием $\psi(x)$:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi nx}{l}, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx. \quad (2.26)$$

Последовательно подставим в это решение значения $t = 0, T, 2T, \dots$. Так как для функции $\varphi(x)$ справедливо соотношение (2.24), то в силу выражения (2.25)

$$\varphi(x) \equiv \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{B}_\alpha^k \psi)(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^k v(x, kT).$$

Подставим сюда выражение для v из (2.26):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^k \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 kT} \sin \frac{\pi nx}{l}. \quad (2.27)$$

Очевидно, что для всех $x \in [0, l]$ двойной ряд, соответствующий повторному ряду (2.27), сходится абсолютно. Следовательно (см. [7]), можно изменить порядок суммирования:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi nx}{l} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^k e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 kT}.$$

Воспользуемся тем, что сумма внутреннего ряда выписывается явно (как сумма геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{1 + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T}} \sin \frac{\pi nx}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{\alpha + (1-\alpha) e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T}} \sin \frac{\pi nx}{l}.$$

Получаем ту же формулу (2.12), то есть такую же связь между коэффициентами Фурье функций φ и ψ , как и в методе разделения переменных.

Итак, алгоритм решения задачи (2.4)-(2.6) для функции $u = u(x, t)$ с помощью операторного метода при условии $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ состоит в следующем:

1. Задаём число q — максимальную степень оператора \mathcal{B}_α в ряде Неймана. Чем оно больше, тем выше точность. Так как скорость сходимости является экспоненциальной, на практике для достижения хорошей точности это число достаточно брать не очень большим (примеры экспериментов будут разобраны далее).
2. На основе исходной задачи (2.4)-(2.6) составляем классическую задачу (2.15)-(2.17), где в качестве φ берётся функция ψ из условия (2.6).

3. Решаем полученную задачу каким-либо численным методом в прямоугольнике $x \in [0, l]$, $t \in [0, qT]$. Обозначим полученное решение как $v(x, t)$.
4. Составляем сумму

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^q (-1)^k \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^k v(x, kT) \equiv \frac{1}{\alpha} \left(\psi(x) + \sum_{k=1}^q (-1)^k \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^k v(x, kT) \right).$$

Это есть приближение функции $\varphi(x) \equiv u(x, 0)$, то есть мы свели нелокальную задачу к классической, решение которой находится известным образом.

2.4 Комбинированный метод

В предыдущем пункте было показано, как можно построить приближённое решение задачи (2.4)-(2.6) в случае $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$. Если это условие нарушается, то норма оператора \mathcal{B}_α может оказаться больше единицы, что приведёт к расходимости ряда Неймана. Возникает вопрос о том, можно ли построить решение в случае малых значений параметра $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Для этого предлагается использовать сильные стороны каждого из двух рассмотренных ранее способов решения, чтобы получить сходящийся метод.

Рассматриваем всё ту же задачу (2.4)-(2.6) и оператор \mathcal{B}_α , введённый по правилу (2.18), который, как мы знаем, можно записать в виде

$$(\mathcal{B}_\alpha y)(x) = - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \sum_{n=1}^{\infty} y_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Уже было показано, что решение можно искать с помощью ряда Неймана (2.20) по степеням оператора \mathcal{B}_α . Изучим случай, когда норма этого оператора больше или равна единице, то есть выполнено

$$\|\mathcal{B}_\alpha\|^2 \equiv \sup_{\|y\|=1} \|\mathcal{B}_\alpha y\|^2 \equiv \sup_{\|y\|=1} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 e^{-2\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T} \geq 1.$$

Такое может иметь место, если $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Добиться уменьшения нормы оператора возможно за счёт отбрасывания конечного числа первых слагаемых в сумме – тогда останутся экспоненты достаточно высоких порядков, чтобы компенсировать величину $(1-\alpha)/\alpha$, стоящую перед суммой. Для простоты сначала рассмотрим случай одного слагаемого.

Введём по аналогии с оператором \mathcal{B}_α следующий оператор, отличающийся от него только тем, что индекс в сумме начинается с 2:

$$(\mathcal{B}_{\alpha,1} y)(x) = - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \sum_{n=2}^{\infty} y_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Предположим, что $\|\mathcal{B}_{\alpha,1}\| < 1$. Тогда ряд, составленный из степеней такого оператора, будет сходящимся. Выясним связь между операторами \mathcal{B}_α и $\mathcal{B}_{\alpha,1}$. Из их определений очевидно, что

$$\mathcal{B}_{\alpha,1} y = \mathcal{B}_\alpha \left(y - y_1 \sin \frac{\pi x}{l} \right).$$

Другими словами, действие оператора $\mathcal{B}_{\alpha,1}$ на функцию $y \in L_2[0, l]$ – это всё равно что действие оператора \mathcal{B}_α на проекцию y на подпространство P_1 , образованное системой из всех базисных синусов, начиная со второго:

$$P_1 = \mathcal{L} \left\{ \sin \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{3\pi x}{l}, \dots \right\} \subset L_2[0, l],$$

где символ \mathcal{L} обозначает линейную оболочку.

Вернёмся к операторному уравнению (2.19) и рассмотрим его в терминах проекций. Обозначим через $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ проекции функций φ и соответственно на подпространство P_1 . Тогда выполнены очевидные равенства:

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) + \varphi_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \psi(x) = \tilde{\psi}(x) + \psi_1 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Подставим эти выражения в операторное уравнение (2.19):

$$\left(\tilde{\varphi}(x) + \varphi_1 \sin \frac{\pi x}{l} \right) - \mathcal{B}_\alpha \left(\tilde{\varphi}(x) + \varphi_1 \sin \frac{\pi x}{l} \right) = \frac{1}{\alpha} \left(\tilde{\psi}(x) + \psi_1 \sin \frac{\pi x}{l} \right).$$

Зная действие оператора \mathcal{B}_α , можем переписать равенство в виде:

$$\tilde{\varphi} - \mathcal{B}_\alpha \tilde{\varphi} + \left(\varphi_1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 T} - \frac{\psi_1}{\alpha} \right) \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{\tilde{\psi}}{\alpha}.$$

Далее следует воспользоваться формулой (2.11), связывающей коэффициенты Фурье φ_n и ψ_n . Из неё следует, что в последнем равенстве выражение, стоящее во внешних круглых скобках, равно нулю. Таким образом,

$$\tilde{\varphi} - \mathcal{B}_\alpha \tilde{\varphi} = \frac{\tilde{\psi}}{\alpha},$$

то есть получаем операторное уравнение, аналогичное уравнению (2.19), но уже в терминах проекций. Как было ранее показано, его формальное решение:

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_{\alpha}^k \tilde{\psi} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_{\alpha,1}^k \psi.$$

Здесь мы воспользовались тем, что на пространстве P_1 операторы \mathcal{B}_{α} и $\mathcal{B}_{\alpha,1}$ действуют одинаково. По предположению $\|\mathcal{B}_{\alpha,1}\| < 1$, поэтому ряд, стоящий в правой части, сходится. Для отыскания функции $\varphi(x)$ достаточно вычислить по формуле (2.11) недостающий коэффициент Фурье:

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) + \varphi_1 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Аналогичным образом можно рассмотреть более общий случай, когда в бесконечной сумме отбрасывается произвольное конечное число гармоник – достаточное для того, чтобы норма оператора получилась меньше единицы. Другими словами, пусть $m \in \mathbb{N}$ и оператор $\mathcal{B}_{\alpha,m}$ таков, что $\|\mathcal{B}_{\alpha,m}\| < 1$,

$$(\mathcal{B}_{\alpha,m} y)(x) = - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \sum_{n=m+1}^{\infty} y_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{B}_{\alpha,m} y = \mathcal{B}_{\alpha} \left(y - y_1 \sin \frac{\pi x}{l} - \dots - y_m \sin \frac{\pi m x}{l} \right),$$

то есть оператор $\mathcal{B}_{\alpha,m}$ действует так же, как оператор \mathcal{B}_{α} на подпространстве

$$P_m = \mathcal{L} \left\{ \sin \frac{\pi(m+1)x}{l}, \sin \frac{\pi(m+2)x}{l}, \dots \right\} \subset L_2[0, l].$$

Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично разобранным случаю $m = 2$.

В итоге получаем схему решения задачи (2.4)-(2.6) с использованием комбинированного метода в случае $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$:

1. Задаём число $m \in \mathbb{N}$. Обычно оно подбирается эмпирическим путём для каждой конкретной задачи. Вычисляем первые m коэффициентов Фурье известной функции ψ :

$$\psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots, m.$$

2. Находим соответствующую проекцию:

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \psi_1 \sin \frac{\pi x}{l} - \dots - \psi_m \sin \frac{\pi m x}{l}, \quad x \in [0, l].$$

3. Задаём число $q \in \mathbb{Z}_+$ и аналогично операторному методу составляем следующую конечную сумму:

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^q \mathcal{B}_\alpha^k \tilde{\psi}.$$

4. Вычисляем первые m коэффициентов Фурье функции φ по формуле

$$\varphi_n = \psi_n \left(\alpha + (1 - \alpha) e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T} \right)^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots, m.$$

5. Прибавляем недостающие гармоники – составляем сумму

$$\tilde{\varphi}(x) + \varphi_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \dots + \varphi_m \sin \frac{\pi m x}{l}.$$

Это есть приближение неизвестной функции $\varphi(x)$.

2.5 Обобщение операторного метода

Вернёмся к общей постановке задачи (2.1)-(2.3). Нетрудно убедиться, что рассмотренный ранее операторный метод можно расширить на этот случай. Оператор \mathcal{B}_α вводится по такому же правилу:

$$(\mathcal{B}_\alpha \psi)(x) = - \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) u(x, T; \psi), \quad \varphi \in L_2[0, l],$$

где $u(x, T; \psi)$ является решением соответствующей прямой задачи с начальной функцией ψ . Далее практически все рассуждения из пункта 2.3 можно дословно перенести на рассматриваемый случай.

Отметим, что метод Фурье в общем случае не является применимым, поскольку решения соответствующей задачи Штурма–Лиувилля не выписываются в явном виде сразу для всех коэффициентов $c(x)$. Метод Фурье можно рассматривать разве что для конкретных задач, в которых дана конкретная функция $c(x)$. Пример такой задачи разобран далее.

2.6 Пример метода Фурье для общего случая

Рассмотрим задачу

$$u_t = u_{xx} - c(x)u, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < T, \quad (2.28)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.29)$$

$$\alpha u(x, 0) + (1 - \alpha)u(x, T) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (2.30)$$

Эта задача аналогична (2.1)-(2.3), но для простоты принято $l = \pi$, $a^2 = 1$. Воспользуемся методом разделения переменных и представим неизвестную функцию u в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Тогда из условий (2.28)-(2.29) получается задача Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + (\lambda - c(x))X(x) = 0, & 0 < x < \pi, \\ X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Её решения (собственные функции и собственные значения) не выписываются в явном виде, но можно попытаться построить их для конкретного примера функции $c(x)$. Положим

$$c(x) = \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}, \quad 0 < x < \pi,$$

где n – зафиксированное целое неотрицательное число. Тогда дифференциальное уравнение в (2.31) имеет вид:

$$X''(x) + \left(\lambda - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right) X(x) = 0.$$

Найдём общее решение этого уравнения, зависящее от λ . Сначала сделаем замену неизвестной функции: $X(x) = y(x)\sqrt{x}$. Получим уравнение

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (\lambda x^2 - n^2)y(x) = 0.$$

Теперь заменим аргумент функции: $s := x\sqrt{\lambda}$; и введём $z(s) \equiv z(x\sqrt{\lambda}) = y(x)$. Относительно $z(s)$ получается уравнение Бесселя порядка n :

$$s^2 z''(s) + sz'(s) + (s^2 - n^2)z(s) = 0.$$

Это уравнение хорошо изучено (см., например, [6]). Его общее решение представляет собой линейную комбинацию

$$z(s) = AJ_n(s) + BN_n(s),$$

где A, B – произвольные постоянные, J_n – функция Бесселя, N_n – функция Неймана одного и того же индекса n . Возвращаясь к исходному уравнению относительно $X(x)$, получим

$$X(x) = \sqrt{x} \left(AJ_n(x\sqrt{\lambda}) + BN_n(x\sqrt{\lambda}) \right).$$

Из граничного условия $X(0) = 0$ следует, что $B = 0$, поскольку функции Неймана не ограничены в окрестности нуля. Тогда можно положить $A = 1$ и использовать второе граничное условие $X(\pi) = 0$, из которого следует $J_n(\pi\sqrt{\lambda}) = 0$. Нули функции Бесселя индекса n можно записать как $\mu_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \dots$.

Таким образом, собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (2.31) имеют следующий вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{\pi} \right)^2, \quad X_k(x) = \sqrt{x} J_n \left(\frac{\mu_k^{(n)} x}{\pi} \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Выпишем решение задачи (2.28)–(2.30) по методу разделения переменных:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k t} X_k(x),$$

где A_k – пока неизвестные коэффициенты. Найдём их из условия (2.30):

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \alpha u(x, 0) + (1 - \alpha)u(x, T) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) + (1 - \alpha) \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k T} X_k(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k X_k(x), \quad B_k = A_k (\alpha + (1 - \alpha) e^{-\lambda_k T}). \end{aligned}$$

Так как собственные функции $X_k(x)$ образуют полную систему в пространстве $L_2[0, \pi]$, коэффициенты Фурье B_k вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{(\psi, X_k)}{(X_k, X_k)} = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^{\pi} \psi(x) \sqrt{x} J_n \left(\frac{\mu_k^{(n)} x}{\pi} \right) dx, \\ \|X_k\|^2 &= \int_0^{\pi} x J_n^2 \left(\frac{\mu_k^{(n)} x}{\pi} \right) dx, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Глава 3

Численная реализация алгоритмов

3.1 Разностная схема для частного случая

В процессе реализации операторного метода, описанного в пункте 2.3, требуется несколько раз решать классическую задачу для уравнения теплопроводности, а именно задачу (2.15)-(2.17). Построим для неё *чисто неявную разностную схему*. Сначала введём в прямоугольнике $D = \{(x, t) : x \in [0, l], t \in [0, T]\}$ равномерную сетку размеров $(N + 1) \times (M + 1)$:

$$\omega_{\tau h} = \omega_{\tau} \times \omega_h,$$

$$\omega_{\tau} = \{t_n = \tau n, n = 0, 1, \dots, M\}, \tau = \frac{T}{M},$$

$$\omega_h = \{x_i = hi, i = 0, 1, \dots, N\}, h = \frac{l}{N}.$$

Поставим в соответствие задаче (2.4)-(2.6) следующую разностную схему, заменив операторы дифференцирования их сеточными аналогами:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} &= a^2 \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2}, & i = \overline{1, N-1}, n = \overline{0, M-1}, \\ u_0^{n+1} &= u_N^{n+1} = 0, & n = \overline{0, M-1}, \\ u_i^0 &= \varphi(x_i), & i = \overline{0, N}. \end{aligned}$$

Здесь $u_i^n \equiv u(x_i, t_n) \equiv u(hi, \tau n)$ — искомое решение в точке $(x_i, t_n) \in \omega_{\tau h}$. Эта разностная схема называется неявной, поскольку для получения решения на $(n + 1)$ -м слое по времени необходимо решить трёхточечное уравнение

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \gamma (u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}), \quad \gamma = \frac{a^2 \tau}{h^2}.$$

Преобразуем эти уравнения и используем краевые условия:

$$\begin{cases} -\gamma u_{i-1}^{n+1} + (2\gamma + 1)u_i^{n+1} - \gamma u_{i+1}^{n+1} = u_i^n, & i = \overline{1, N-1}, \\ u_0^{n+1} = u_N^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Значение n здесь фиксировано, то есть решаем задачу для вычисления $(n+1)$ -го слоя по времени. На каждом шаге коэффициенты системы остаются прежними, кроме правой части уравнения — она меняется. Заметим, что данная система линейных алгебраических уравнений описывается трёхдиагональной матрицей:

$$Au^{n+1} = u^n,$$

$$u^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_{N-1}^n)^T, \quad A \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2\gamma + 1 & -\gamma & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\gamma & 2\gamma + 1 & -\gamma & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 2\gamma + 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\gamma + 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\gamma & 2\gamma + 1 \end{pmatrix}.$$

Линейные системы с трёхдиагональной матрицей удобно решать *методом прогонки*. Для этого вводятся вспомогательные прогоночные коэффициенты, а элементы вектора-решения вычисляются последовательно от конца к началу. Формулы для коэффициентов и для решения имеют следующий вид:

$$c_i = 2\gamma + 1 - \gamma a_{i-1}, \quad i = \overline{2, N-2}, \quad c_1 = 2\gamma + 1;$$

$$a_i = \frac{\gamma}{c_i}, \quad i = \overline{1, N-2};$$

$$b_i = \frac{u_i^n + \gamma b_{i-1}}{c_i}, \quad i = \overline{2, N-1}, \quad b_1 = \frac{u_1^n}{2\gamma + 1};$$

$$u_{N-1}^{n+1} = b_{N-1}, \quad u_i^{n+1} = a_i u_{i+1}^{n+1} + b_i, \quad i = \overline{N-2, 1}.$$

Рассмотренный численный метод решения хорошо изучен ([10], [11], [12]). Известно, например, что вычислительная сложность метода прогонки составляет всего $O(N)$ арифметических операций. С учётом того, что нужно решить M таких линейных систем (3.1) (по одной для каждого шага времени), общая сложность вычислений составляет $O(MN)$.

Заметим также, что матрица A является матрицей с диагональным преобладанием. Отсюда следует, что задача с такой матрицей является корректно

поставленной: решение систем (3.1) всегда существует, единственно и устойчиво. Последнее условие означает, что в процессе вычислений на компьютере ошибки округления нарастать не будут.

Кроме того, чисто неявная разностная схема является абсолютно сходящейся, то есть она не имеет ограничений на τ и h . Можно также показать, что решение будет устойчиво по отношению к начальным данным.

3.2 Сравнение двух разностных схем для общего случая

Теперь для задачи (2.1)-(2.3) с произвольным коэффициентом $c(x)$ рассмотрим соответствующую прямую задачу с классическим начальным условием. Сопоставим ей две разностные схемы, отличающиеся лишь в выборе временного слоя в линейной части уравнения, соответствующей слагаемому с $c(x)$:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a^2 \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} - c_i u_i^n, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad n = \overline{0, M-1}, \quad (3.2)$$

$$u_0^{n+1} = u_N^{n+1} = 0, \quad n = \overline{0, M-1}, \quad (3.3)$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}, \quad (3.4)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a^2 \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} - c_i u_i^{n+1}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad n = \overline{0, M-1}, \quad (3.5)$$

$$u_0^{n+1} = u_N^{n+1} = 0, \quad n = \overline{0, M-1}, \quad (3.6)$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (3.7)$$

Покажем, что вторая разностная схема (3.5)-(3.7) абсолютно устойчива, в отличие от первой (3.2)-(3.4), которая является условно устойчивой. Далее воспользуемся некоторыми сведениями из [11].

Пусть $H = \{y(x), x \in \omega_h, y_0 = y_N = 0\}$ – пространство сеточных функций на ω_h , обращающихся в ноль на концах отрезка, со скалярным произведением

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad y, v \in H, \quad y_i \equiv y(x_i), \quad v_i \equiv v(x_i).$$

Будем рассматривать сеточные функции $y^n \in H$, зависящие от параметра t_n . Двухслойной разностной схемой в каноническом виде называется семейство

$$B \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + Ay^n = f^n, \quad n = 0, 1, \dots, M-1, \quad y^0 \in H, \quad (3.8)$$

где A, B – некоторые линейные операторы в H , $f^n \in H$. Далее предполагаем, что B^{-1} существует в H , то есть решение задачи y^{n+1} существует и единственно.

Разностная схема (3.8) называется *устойчивой*, если существуют постоянные C_1, C_2 , не зависящие от τ, h, n , такие что для любых $f^n, y^0 \in H$ выполнено

$$\|y^n\| \leq C_1 \|y^0\| + C_2 \max_{0 \leq j < n} \|f^j\|, \quad n = 1, \dots, M.$$

Теорема. Пусть в схеме (3.8) оператор A является самосопряжённым, положительно определённым и не зависит от n . Тогда при выполнении неравенства $B \geq \frac{\tau}{2} A$ схема (3.8) устойчива.

Утверждение 3.2.1. Схема (3.2)-(3.4) является условно устойчивой.

Доказательство. Используем метод гармоник – будем искать решение в виде

$$y_i^n(\theta) = q^n e^{i\theta I},$$

где θ – произвольный вещественный параметр; q – число, подлежащее определению; I – мнимая единица. Подставим это выражение в (3.2). Граничные и начальные условия теперь не учитываются, так как не влияют на устойчивость.

$$\frac{q^{n+1} e^{i\theta I} - q^n e^{i\theta I}}{\tau} = \frac{q^{n+1} e^{(i-1)\theta I} - 2q^{n+1} e^{i\theta I} + q^{n+1} e^{(i+1)\theta I}}{h^2} - c_i q^n e^{i\theta I},$$

$$q - 1 = q\gamma(2 \cos \theta - 2) - \tau c_i, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}.$$

Положим $\theta = 0$, тогда $q = 1 - \tau c_i$. Отсюда следует, что $|q| > 1$ при $\tau c_i > 2$, то есть в этом случае решение y_i^n неограниченно возрастает с увеличением n . Значит, $\tau c_i < 2$ – необходимое условие устойчивости.

Утверждение 3.2.2. Схема (3.5)-(3.7) является абсолютно устойчивой.

Доказательство. Схему можно переписать в каноническом виде:

$$B \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + Ay^n = 0, \quad n = 0, \dots, M-1, \quad y^n \in H, \\ A = C - \Lambda, \quad B = E + \tau(C - \Lambda),$$

где C – оператор умножения на коэффициент c_i , а Λ – оператор второй разностной производной, то есть

$$(Cy)_i = c_i y_i, \quad (\Lambda y)_i = y_{\bar{x},i} \equiv \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}, \quad y \in H.$$

Для того чтобы применить теорему, нужно показать, что $A^* = A > 0$ и $B \geq \frac{\tau}{2}A$. Докажем эти три факта по отдельности. Для этого нам понадобится следующая

Лемма. В пространстве H справедлив разностный аналог формулы интегрирования по частям: для любых $y, v \in H$

$$\sum_{i=1}^{N-1} y_{\bar{x},i} v_i h = - \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_{x,i} h.$$

а) Проверим, что оператор A является положительно определённым. Для произвольного элемента $y \in H$ выполнено:

$$\begin{aligned} (Ay, y) &= ((C - \Lambda)y, y) = (Cy, y) - (\Lambda y, y) = \sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i y_i h - \sum_{i=1}^{N-1} y_{\bar{x},i} y_i h = \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} c_i (y_i)^2 h + \sum_{i=1}^{N-1} (y_{\bar{x},i})^2 h \geq 0, \end{aligned}$$

так как $c_i \geq 0$. Если $(Ay, y) = 0$, то $y_{\bar{x},i} \equiv 0$, а из краевых условий $y_0 = y_N = 0$ следует, что $y \equiv 0$. Таким образом, $A > 0$.

б) Покажем самосопряжённость оператора A . Для произвольных функций $y, v \in H$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} (Ay, v) &= ((C - \Lambda)y, v) = (Cy, v) - (\Lambda y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i v_i h - \sum_{i=1}^{N-1} y_{\bar{x},i} v_i h = \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i v_i h + \sum_{i=1}^{N-1} y_{\bar{x},i} v_{\bar{x},i} h. \end{aligned}$$

В последнее выражение y, v входят симметрично, поэтому

$$(Ay, v) = (Av, y) \quad \Rightarrow \quad A^* = A.$$

в) Наконец проверим выполнение операторного неравенства $B - \frac{\tau}{2}A \geq 0$. Выберем произвольный элемент $y \in H$, тогда

$$\begin{aligned} \left(\left(B - \frac{\tau}{2}A \right) y, y \right) &= \left(\left(E + \frac{\tau}{2}(C - \Lambda) \right) y, y \right) = (y, y) + \frac{\tau}{2}((C - \Lambda)y, y) = \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} (y_i)^2 h + \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^{N-1} c_i (y_i)^2 h - \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^{N-1} y_{\bar{x},i} y_i h = \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} (y_i)^2 h + \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^{N-1} c_i (y_i)^2 h + \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (y_{\bar{x},i})^2 h \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, условия теоремы выполнены сразу для всех $\tau, h > 0$. Отсюда следует, что разностная схема (3.5)-(3.7) абсолютно устойчива.

Проведённое сравнение двух разностных схем может быть полезно при выборе способа реализации вычислений для каждой конкретной задачи. Например, первая схема (3.2)-(3.4) легко переносится из случая, описанного в пункте 3.1. Она приводится к виду, очень похожему на (3.1) – в системе линейных уравнений изменится лишь правая часть, а матрица останется такой же и с постоянными элементами вдоль каждой диагонали. При выборе второй разностной схемы (3.5)-(3.7) появляется преимущество в устойчивости, но реализацию метода прогонки для решения системы приходится немного изменять, поскольку теперь меняется матрица системы, причём её элементы на главной диагонали не равны между собой. Кроме того, на конкретных примерах было показано, что во многих случаях вторая разностная схема даёт гораздо большую скорость сходимости при уменьшении τ . В дальнейшем при реализации алгоритмов для общего случая задачи с коэффициентом $c(x)$ мы будем пользоваться именно этой разностной схемой.

Глава 4

Примеры

Для численного решения и визуализации данных была разработана компьютерная программа в двух версиях (для решения задачи без коэффициента и для общего случая) с использованием пакета *MATLAB*. При написании программы использовались справочные материалы из [13], [14].

Далее во всех примерах для простоты зафиксированы следующие значения:

- $a^2 = 1$ – коэффициент теплопроводности в уравнении,
- $l = \pi$ – длина отрезка (стержня),
- $T = 2$ – продолжительность измерений (максимальное значение t),
- $N = 100$ – число узлов сетки по пространственной переменной x ,
- $M = 100$ – число узлов сетки по временной переменной t .

В примерах 4.1–4.5 рассмотрена задача без коэффициента, то есть (2.4)–(2.6). В оставшихся примерах 4.6–4.8 изучен общий случай – задача (2.1)–(2.3). На всех иллюстрациях приняты одни и те же цветовые обозначения; все примеры сопровождаются подробными комментариями.

4.1 Пример 1

Для обеих иллюстраций на следующей странице выбраны параметры:

$$\psi(x) = x(\pi - x), \quad \alpha = 0,5, \quad t = 1,$$

20 слагаемых ряда Фурье при вычислении точного решения,

1 и 3 слагаемых ряда Неймана соответственно для численного решения.

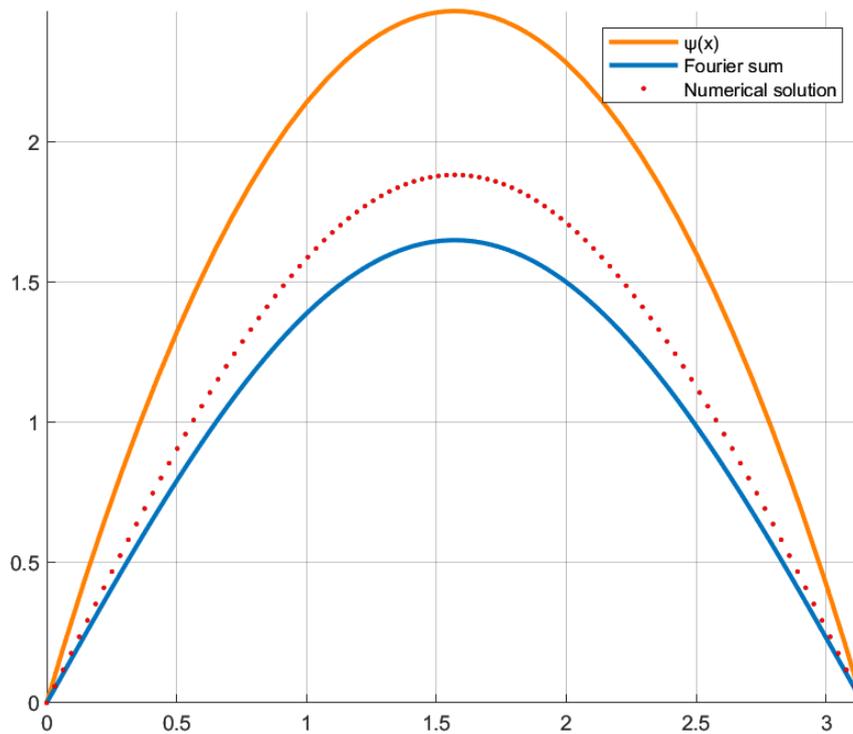


Рис. 4.1: Заданная функция $\psi(x) = x(\pi - x)$ (верхний непрерывный график) и сравнение точного и приближённого решений на первой итерации.

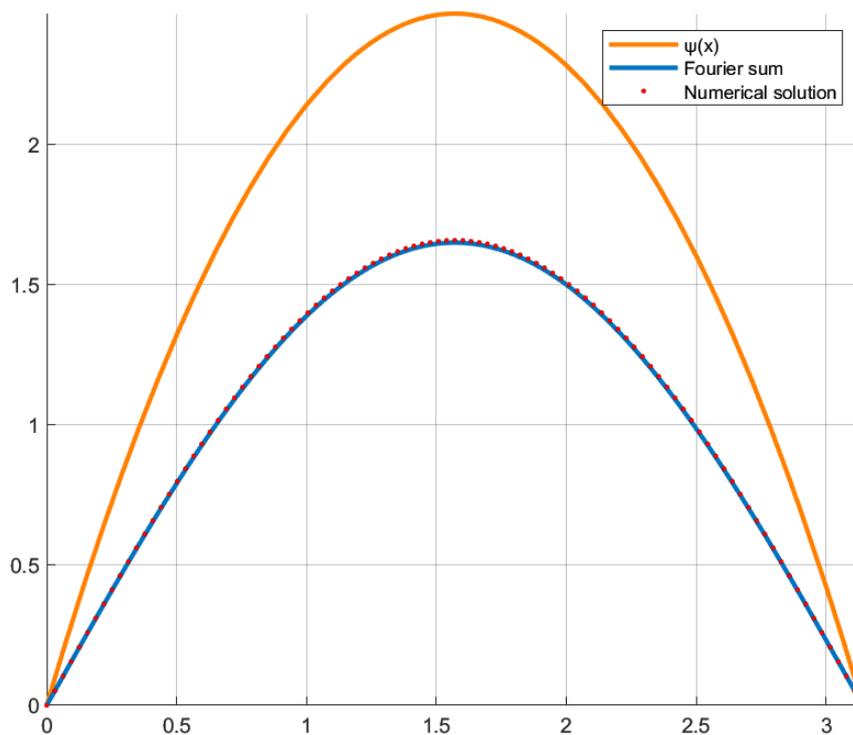


Рис. 4.2: Заданная функция $\psi(x) = x(\pi - x)$ (верхний непрерывный график) и сравнение точного и приближённого решений на третьей итерации.

На рисунках 4.1-4.2 оранжевым цветом показан точный график введённой функции $\psi(x) = x(\pi - x)$. Нижний непрерывный график синего цвета обозначает частичную сумму ряда Фурье; его можно считать точным решением, так как число слагаемых взято достаточно большим, чтобы график стабилизировался. Красный точечный график обозначает частичную сумму ряда Неймана, то есть численное (сеточное) решение. На этих двух рисунках изображены два случая: число слагаемых ряда Неймана при вычислении приближённого решения равно 1 и 3 соответственно при всех тех же значениях остальных параметров. Можно убедиться, что численное решение при данном $t = 1$ сходится с ощутимой скоростью к точному при увеличении числа слагаемых. Заметим, что $\alpha = 0,5$ выбрано таким образом, чтобы было справедливо утверждение 2.3.1, обеспечивающее сходимость ряда Неймана.

4.2 Пример 2

Рассматриваем ту же функцию $\psi(x)$, тот же момент времени t и то же число слагаемых ряда Фурье 20, но параметр α возьмём ближе к нулю:

$$\psi(x) = x(\pi - x), \quad \alpha = 0,1, \quad t = 1.$$

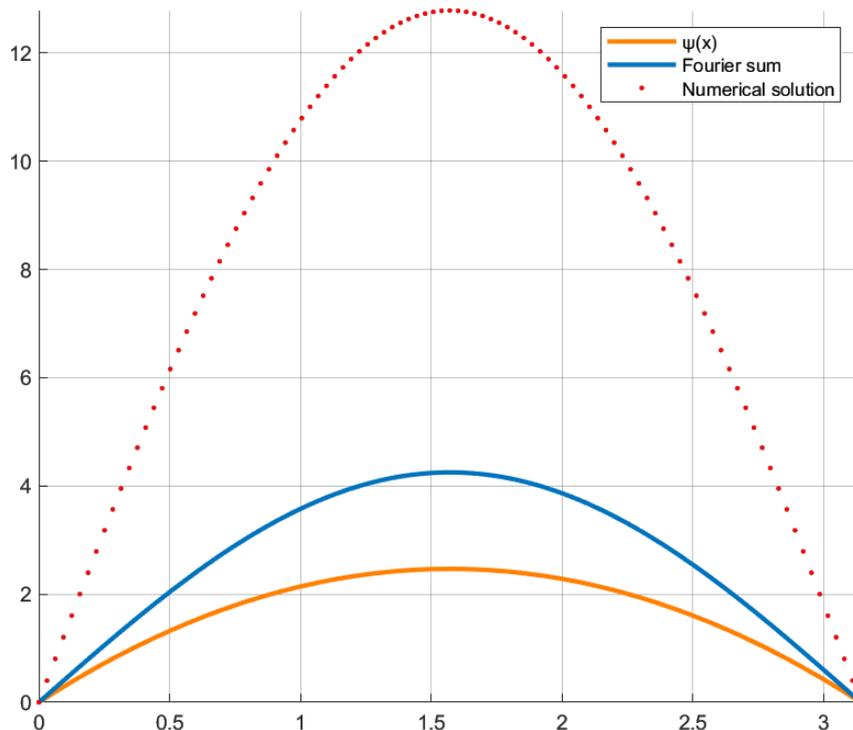


Рис. 4.3: Отклонение численного решения от точного; 3 слагаемых ряда.

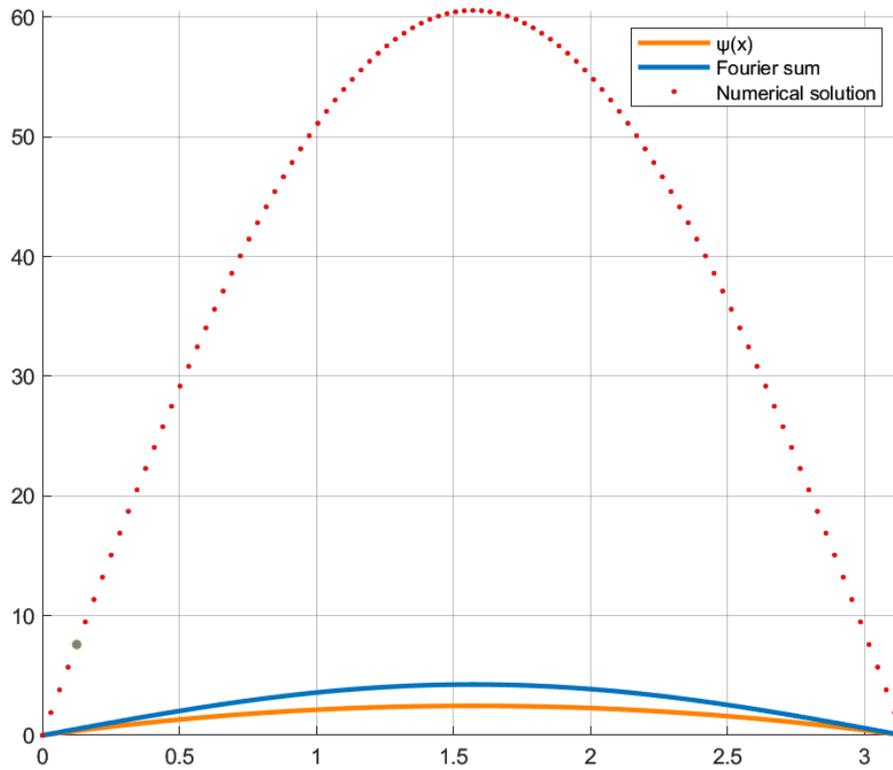


Рис. 4.4: Ещё более сильное отклонение; 11 слагаемых ряда.

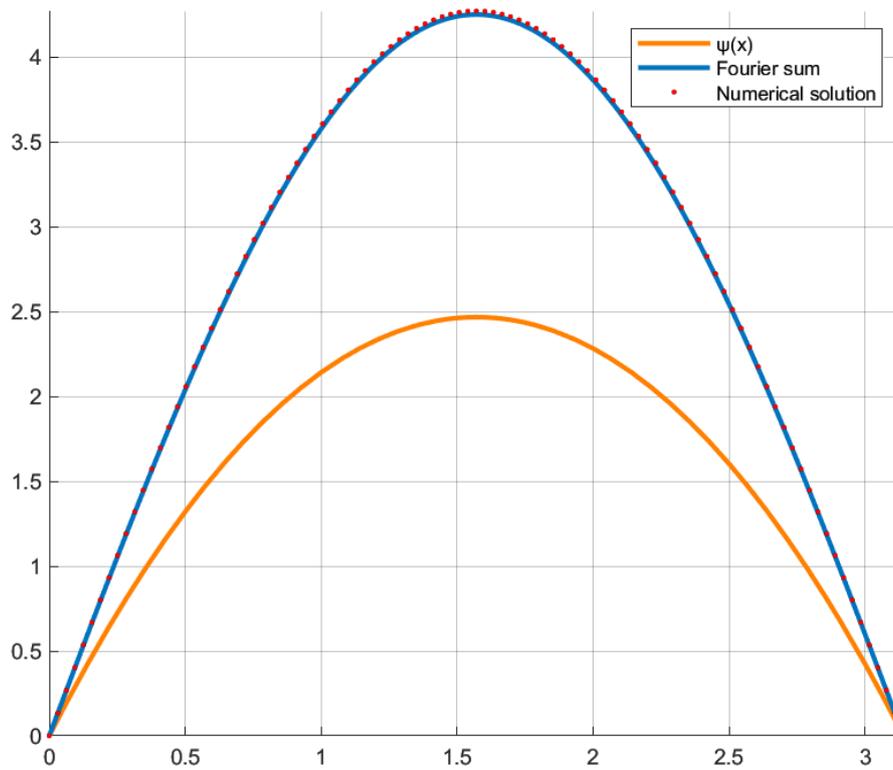


Рис. 4.5: Использование комбинированного метода с поправкой на одну гармонику; сближение графиков точного и численного решений.

На рисунках 4.3-4.4 показано, как растёт решение по операторному методу (сеточная функция) при увеличении числа слагаемых ряда Неймана – 3 и 11 соответственно. Как мы уже знаем, расходимость объясняется малостью параметра α . На рисунке 4.5 применён комбинированный метод, который был подробно изложен в пункте 2.4, в котором число гармоник равно 1. Из рисунка видно, что такая поправка действительно может предотвратить расходимость численного решения при малых α .

4.3 Пример 3

Пусть

$$\psi(x) = x^2(\pi - x)^4, \quad \alpha = 0,2, \quad t = 0,5.$$

Число слагаемых ряда Фурье – 8 (напомним, что оно берётся достаточно большим, чтобы график аналитического решения стабилизировался). На рисунках ниже представлены случаи соответственно 1 и 9 слагаемых ряда Неймана для численного решения. В этом примере, в частности, видно, что даже при малых α может наблюдаться сходимость операторного метода, то есть условие $\alpha \geq 0,5$, полученное в пункте 2.3, не является для этого необходимым.

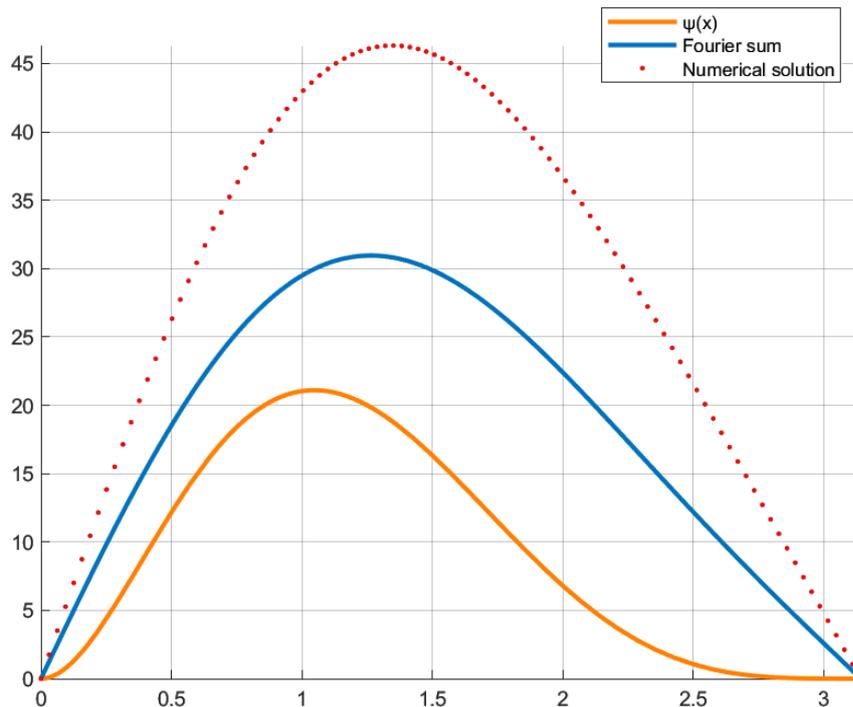


Рис. 4.6: Графики $\psi(x) = x^2(\pi - x)^4$, точного и численного решений при одном слагаемом ряда Неймана.

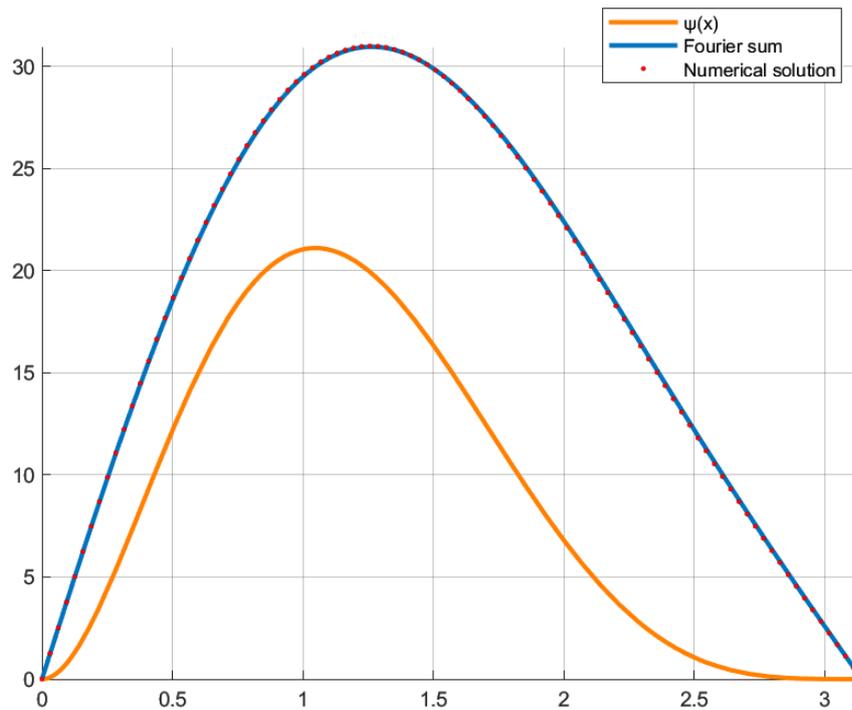


Рис. 4.7: Графики $\psi(x) = x^2(\pi - x)^4$, точного и численного решений при девяти слагаемых ряда Неймана.

4.4 Пример 4

Возьмём ту же функцию ψ , как в предыдущем примере; пусть значение параметра α ещё меньше:

$$\psi(x) = x^2(\pi - x)^4, \quad \alpha = 0,01, \quad t = 1.$$

Число слагаемых ряда Фурье – 8, ряда Неймана – 5. На рисунках ниже представлены ситуации до и после применения комбинированного метода, описанного в пункте 2.4, с поправкой на одну гармонику.

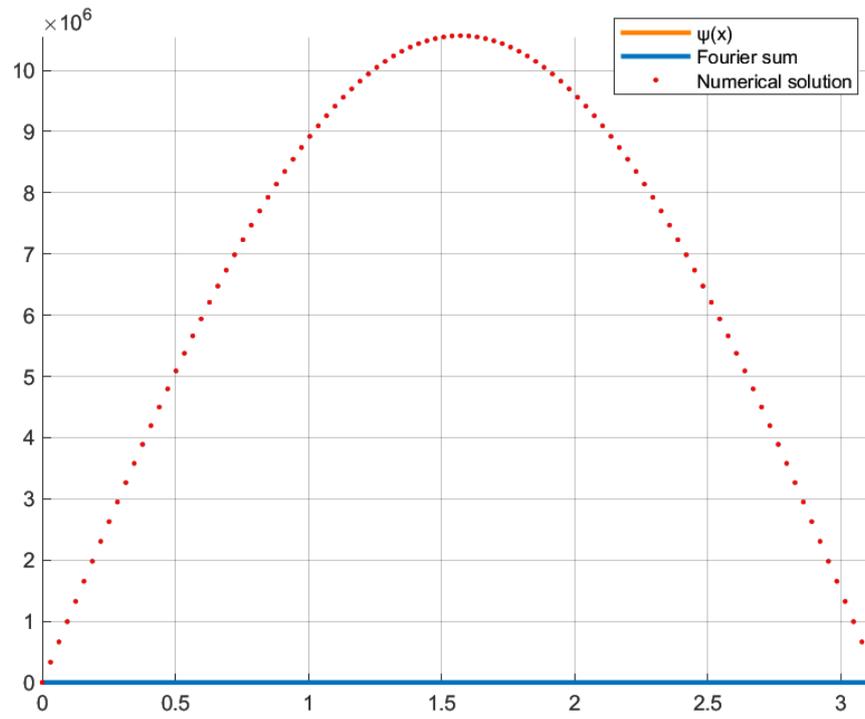


Рис. 4.8: Расходимость численного решения из-за малости α .

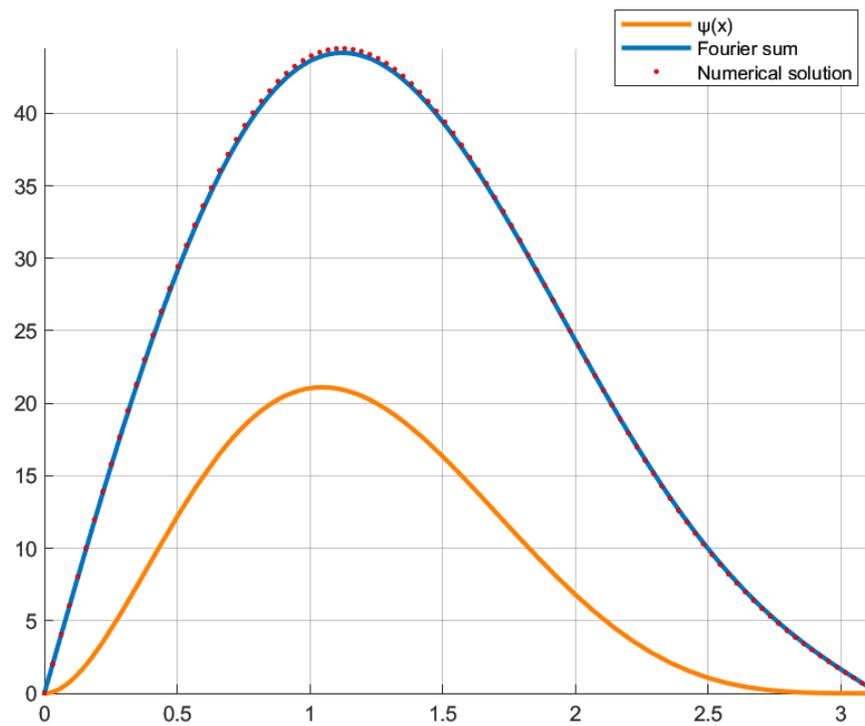


Рис. 4.9: После применения комбинированного метода с одной гармоникой.

4.5 Пример 5

Пусть

$$\psi(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x, \quad \alpha = 0,01, \quad t = 1.$$

Число слагаемых ряда Неймана – 13. На рисунках ниже представлены случаи применения операторного метода, комбинированного метода с одной гармоникой и комбинированного метода с тремя гармониками соответственно. Этот пример показывает, что иногда поправки лишь на одну гармонику бывает недостаточно для сходимости.

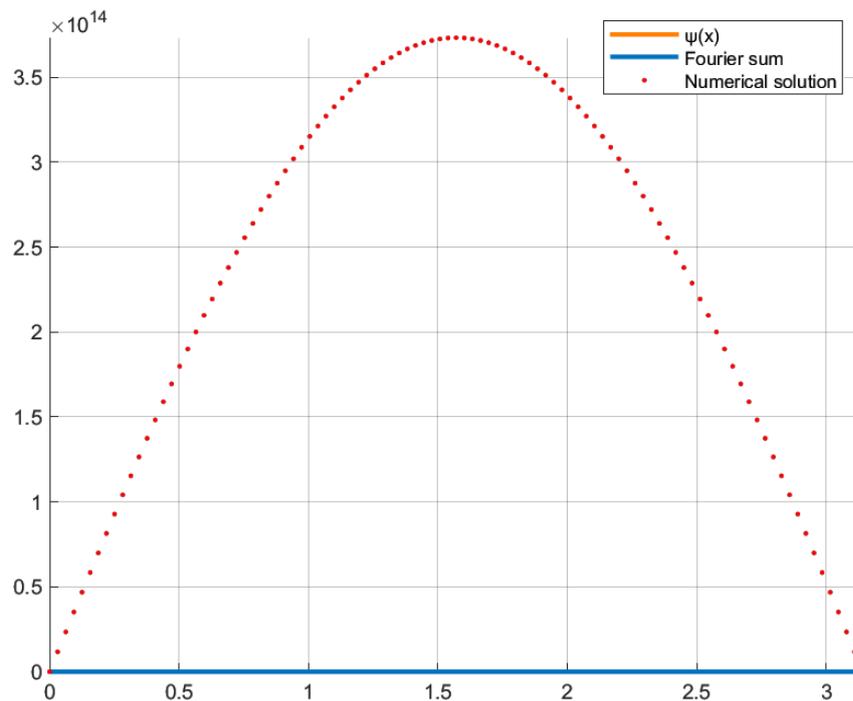


Рис. 4.10: Сильная расходимость операторного метода.

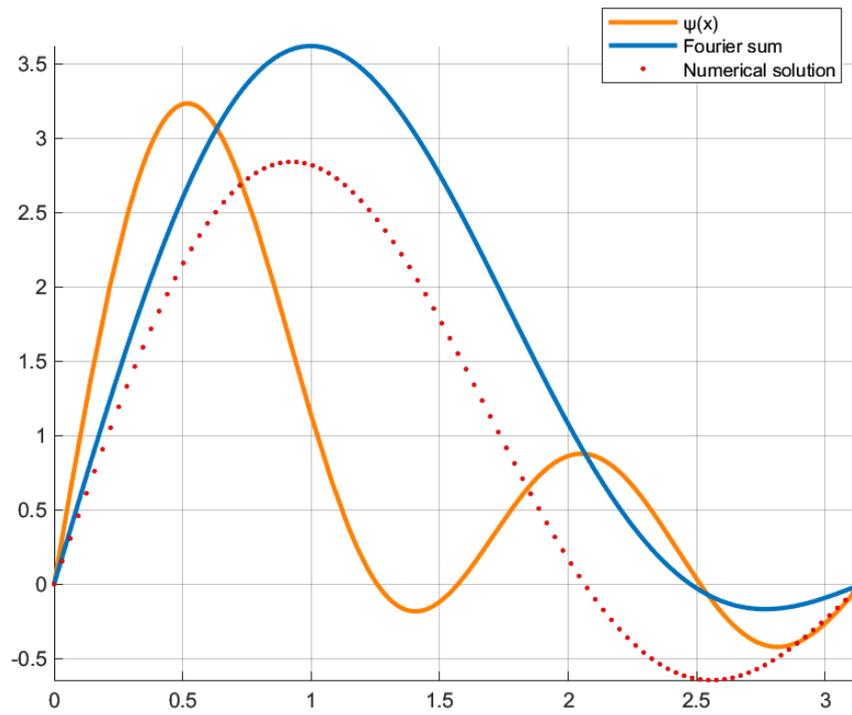


Рис. 4.11: После применения комбинированного метода с одной гармоникой.

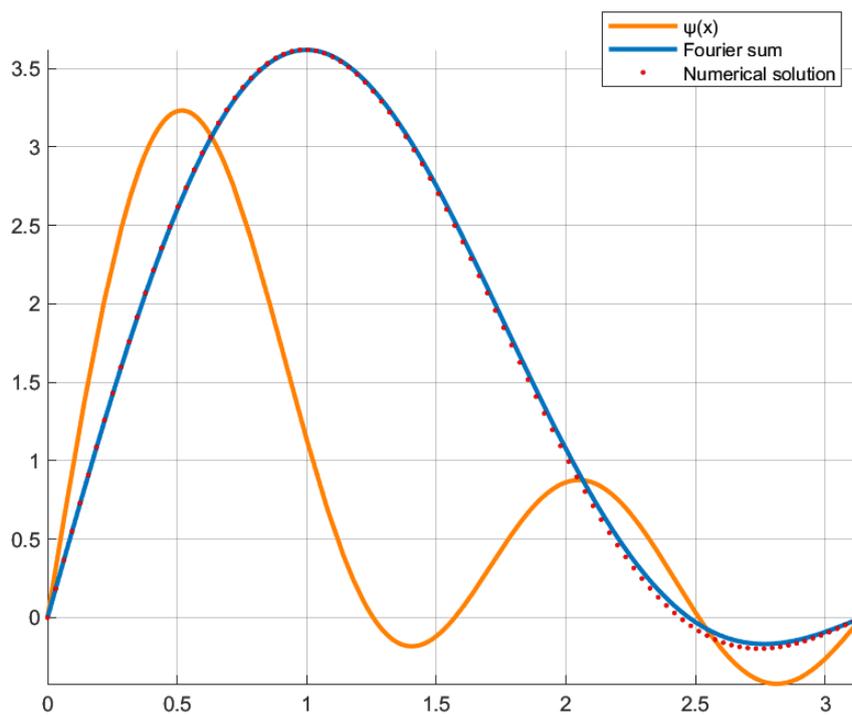


Рис. 4.12: После применения комбинированного метода с тремя гармониками.

4.6 Пример 6

Далее рассмотрим общую задачу с коэффициентом (2.1)-(2.3). Помимо всех параметров, которые были даны в предыдущих примерах, здесь также следует указывать функцию $c(x)$. Также, как мы знаем, метод Фурье для такой задачи не работает, поэтому решение имеется только численное – по операторному методу. В этом примере входные данные следующие:

$$\psi(x) = x(\pi - x), \quad c(x) = x, \quad \alpha = 0,1, \quad t = 1.$$

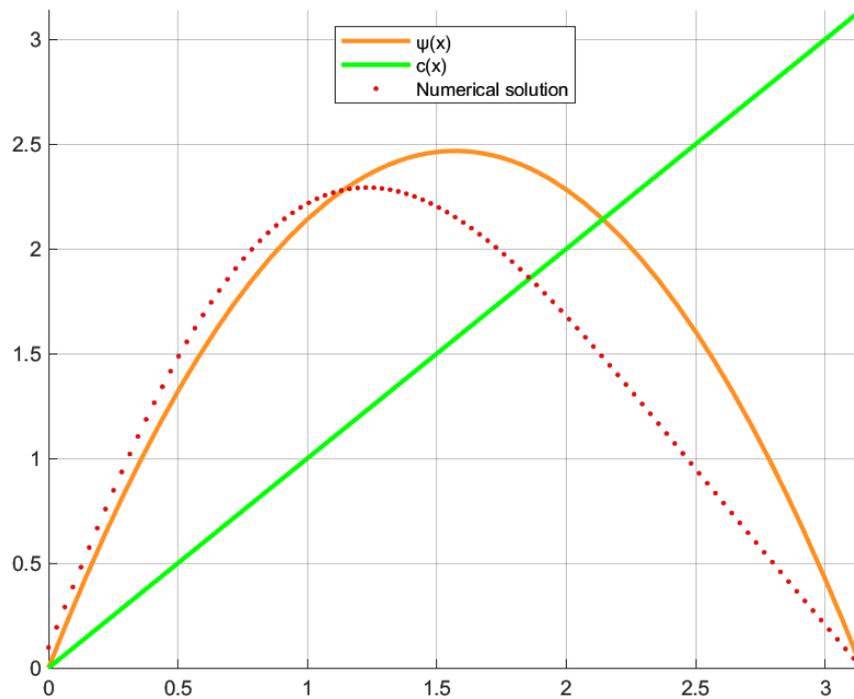


Рис. 4.13: Использование операторного метода для задачи с коэффициентом; одно слагаемое ряда Неймана.

На рисунке 4.13 изображены графики функций $\psi(x)$, $c(x)$ и график численного решения (сеточная функция) с одним слагаемым ряда Неймана. Из рисунка видно, например, что из-за наличия коэффициента $c(x)$ график решения становится несимметричным и чуть наклоняется влево. Кроме того, не наблюдается расходимости численного решения, несмотря на малый параметр α – такой же, как в примере 4.2.

Поскольку в данном случае у нас нет точного решения, с которым можно было бы провести сравнение, возникает вопрос: как проверить корректность нашего алгоритма? На рисунке 4.14 показан пример естественного теста, который можно провести, чтобы убедиться в том, что вычислительная программа даёт адекватный результат. Возьмём два слагаемых ряда Неймана. Тест заключается в том, что составляется сумма

$$\alpha \hat{u}(x, 0) + (1 - \alpha) \hat{u}(x, T),$$

где $\hat{u}(x, t)$ – приближённое решение в виде сеточной функции. Эта сумма, естественно, должна быть близка к $\psi(x)$ в силу нелокального условия (2.3). На рисунке 4.14 видно, что полученная сеточная функция совпадает с $\psi(x)$, то есть на этом примере алгоритм работает хорошо.

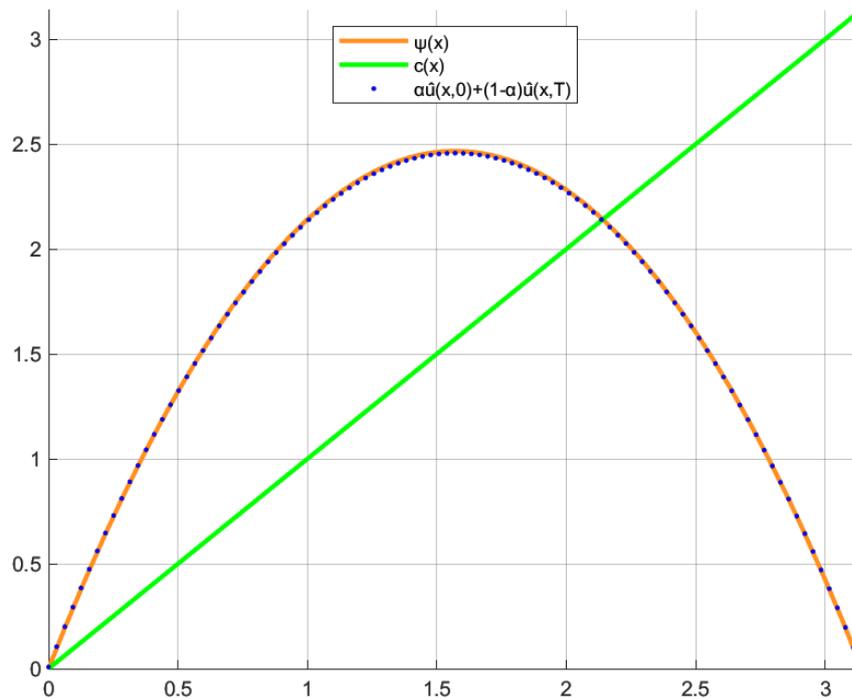


Рис. 4.14: Тест операторного метода для задачи с коэффициентом; два слагаемых ряда Неймана.

4.7 Пример 7

Рассмотрим следующие входные данные:

$$\psi(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{10}, \quad c(x) = 100e^{-10(x-2)^2}, \quad \alpha = 0,01, \quad t = 0,5,$$

3 слагаемых ряда Неймана.

Все три графика при данных параметрах изображены на рисунке 4.15. Аналогично предыдущему примеру можем провести тест корректности алгоритма. Результаты показаны на рисунках 4.16-4.17 при 1 и 3 слагаемых ряда Неймана. Заметим, что в качестве $c(x)$ здесь берётся локализованная функция типа «колокол». На рисунке 4.16 видно, что в точках, где значение $c(x)$ велико, наблюдается более высокая скорость сходимости. Но в итоге при увеличении числа слагаемых тестовая сеточная функция всё так же стремится к $\psi(x)$.

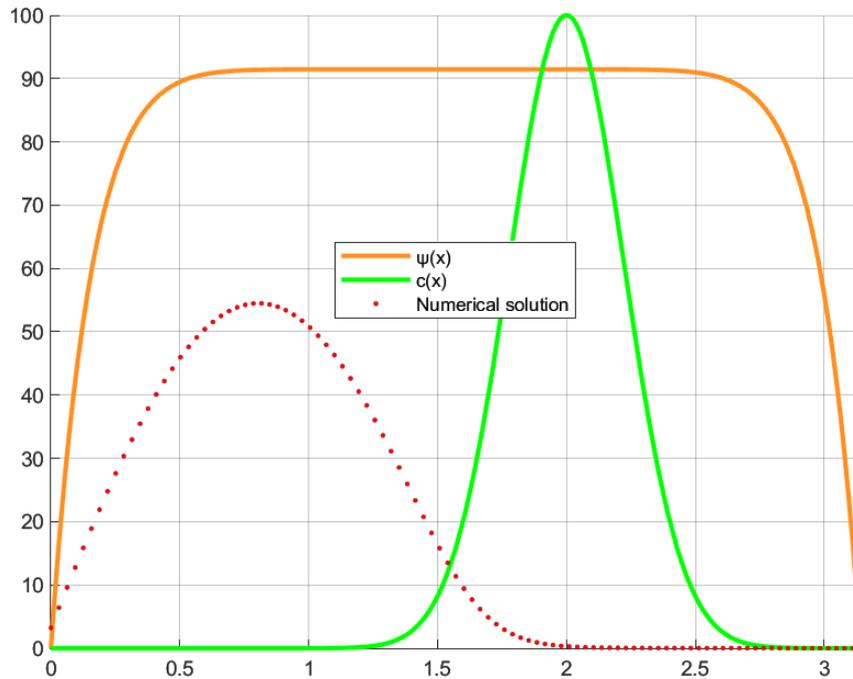


Рис. 4.15: Использование операторного метода для задачи с коэффициентом.

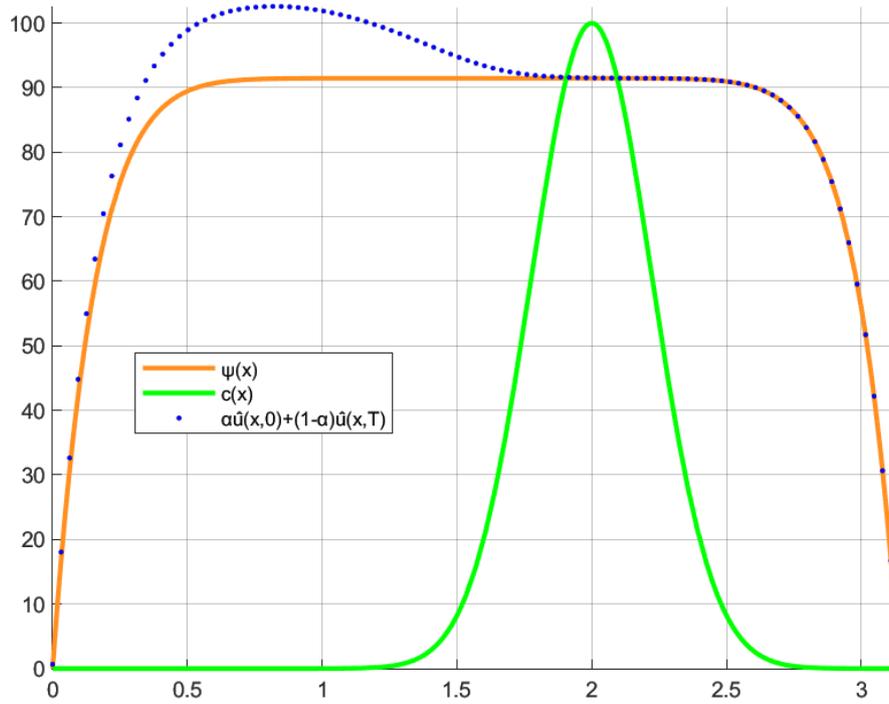


Рис. 4.16: Тест операторного метода для задачи с коэффициентом; одно слагаемое ряда Неймана.

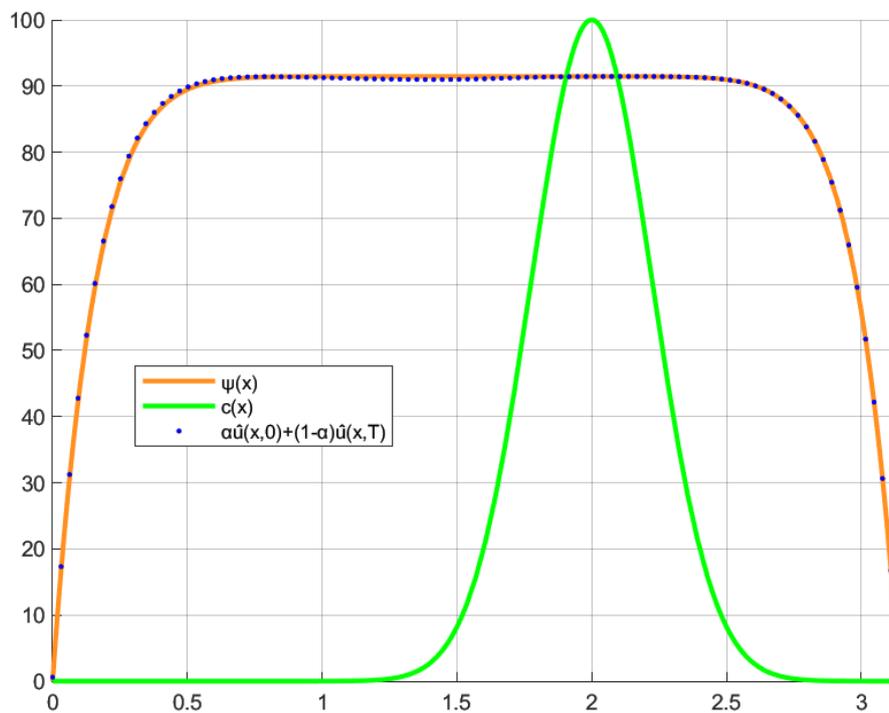


Рис. 4.17: Тест операторного метода для задачи с коэффициентом; три слагаемых ряда Неймана.

4.8 Пример 8

Как было описано в пункте 2.6, метод Фурье можно применять для конкретных коэффициентов вида

$$c(x) = \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В этом примере $n = 1$. Рассмотрен метод Фурье на следующих исходных данных (для простоты $\psi(x)$ берётся в виде суммы двух собственных функций):

$$\psi(x) = \sqrt{x} \left(J_1 \left(\frac{\mu_1^{(1)} x}{\pi} \right) + J_1 \left(\frac{\mu_2^{(1)} x}{\pi} \right) \right), \quad c(x) = \frac{3}{4x^2}, \quad \alpha = 0, 2, \quad t = 0.$$

Здесь J_1 – функция Бесселя первого порядка, $\mu_1^{(1)} \approx 3,8317$, $\mu_2^{(1)} \approx 7,0156$. Теперь можно сравнивать численное решение с точным. На рисунках ниже график $c(x)$ для наглядности опускается, поскольку эта функция не ограничена в окрестности нуля.

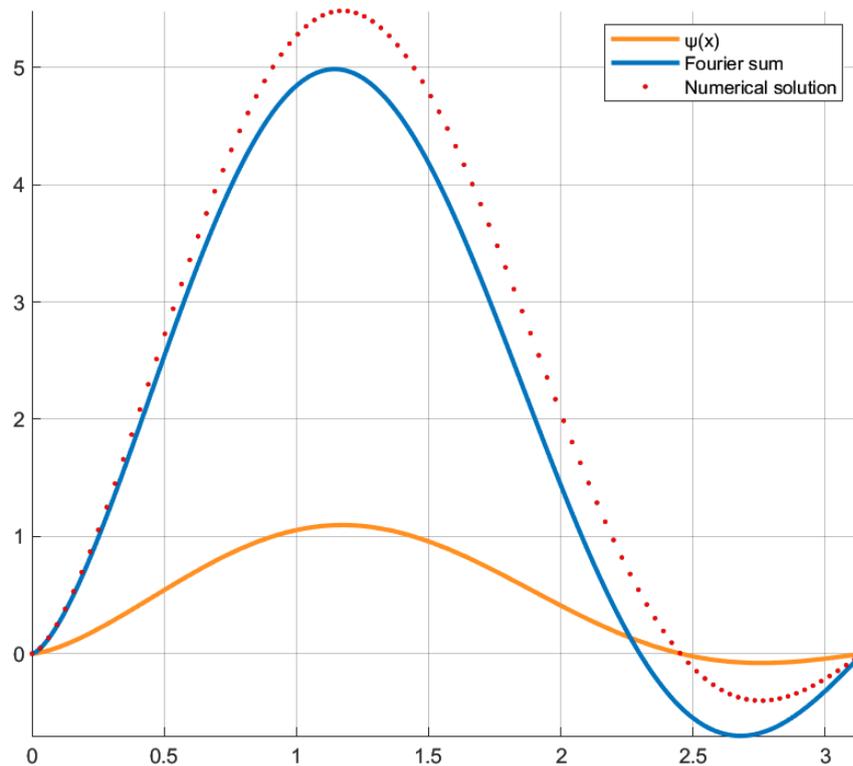


Рис. 4.18: Точное и численное решения в случае с коэффициентом; 1 слагаемое ряда Неймана.

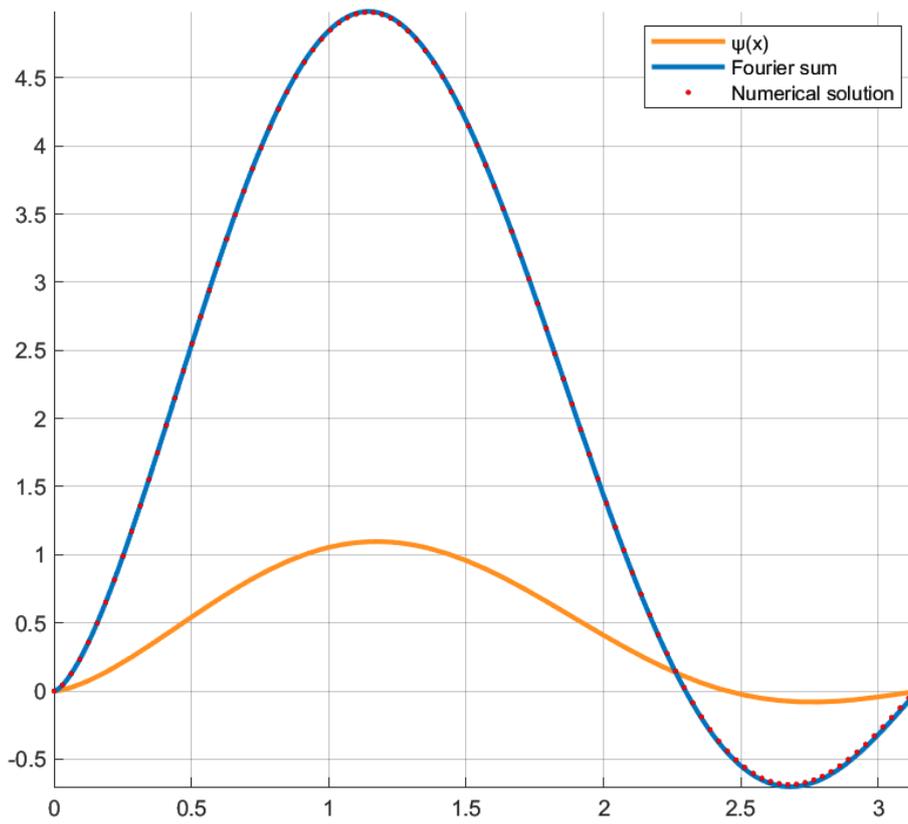


Рис. 4.19: Точное и численное решения в случае с коэффициентом; 5 слагаемых ряда Неймана.

Глава 5

Заключение

В настоящей работе исследовалась нелокальная по времени задача для одномерного уравнения теплопроводности.

- Рассмотрен важный частный случай данной задачи при отсутствии бокового теплообмена в стержне (коэффициента в уравнении). Проведён теоретический анализ задачи, установлена её однозначная разрешимость, исследована корректность. Использован метод разделения переменных (метод Фурье) для нахождения аналитического решения.
- Предложены операторный метод, который распространяется также на общий случай с коэффициентом, и алгоритм численного решения нелокальной задачи. Выделены ключевые этапы построения решения.
- Для частного случая также предложен комбинированный метод решения, использующий преимущества первых двух и регуляризирующий задачу в случаях, когда она становится близка к некорректной.
- Рассмотрены две разностные схемы для решения прямой задачи теплопроводности, проведено сравнение устойчивости.
- Разработана цельная компьютерная программа, которая реализует теоретические алгоритмы и визуализирует вычисления.
- Проведена серия вычислительных экспериментов для различных значений входных данных, подтвердившая высокую надёжность алгоритмов.

В результате проделанной работы все поставленные цели достигнуты и исследование можно считать завершённым.

Результаты работы носят теоретический характер, но имеют и практическую значимость при приближённом решении задач для уравнений математической физики. В частности, нередко в задачах теплопроводности для данного материального тела известны усреднённые значения температуры за данный период времени вместо значений в фиксированный момент. При этом в настоящей работе это усреднение понимается в смысле среднего арифметического между начальным и финальным моментами времени. В дальнейшем представляется интересным изучение более общего случая такого нелокального условия, например,

$$\int_0^T u(x, t) d\mu(t) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

где u_1 – заданная достаточно гладкая функция на отрезке $[0, l]$, а интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса.

Кроме того, в дальнейших работах планируется рассмотреть пространственные области высоких размерностей (например, круг или прямоугольник в двумерном случае), а также разные типы граничных условий. Изучение применимости представленного метода для более общих уравнений также перспективно, поскольку в методе явно не используется информация о конкретном виде уравнения. Также было бы интересно предложить другие методы приближённого решения подобных задач и в каждом случае изучить сходимость, получить оценки погрешностей. Исходя из вышесказанного, представляется, что использованные в работе методы могут быть дополнены и применены в дальнейшем.

Литература

- [1] Жак Адамар. *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа*. Перев. с франц. – М., 1978.
- [2] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*. – М.: Наука, 1974.
- [3] Вабищевич П. Н. *Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности // Дифференциальные уравнения*, 1981, том 17, номер 7, с. 1193-1199.
- [4] Кангужин Б. Е. *О единственности решения нелокальной по времени задачи для уравнения теплопроводности // Неклассические уравнения математической физики: Труды семинара, посвящённого 60-летию профессора В. Н. Врагова / Под ред. А. И. Кожанова*. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 2005. – С. 130-132.
- [5] Королёв Г. М. *Специальная нелокальная задача для одномерного уравнения теплопроводности // Герценовские чтения, материалы научной конференции, 9-13 апреля 2018 г.* – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2018. – С. 96-100.
- [6] Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. Изд-во МГУ, Наука, 2004.
- [7] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. *Математический анализ*. Изд-во МГУ, 2004.
- [8] Денисов А. М. *Введение в теорию обратных задач*. Изд-во МГУ, 1994.
- [9] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [10] Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы*. – М.: Наука, 1989.

- [11] Абакумов М. В., Гулин А. В. *Лекции по численным методам математической физики.* – М.: ИНФРА-М, 2013.
- [12] Ионкин Н. И. *Численные методы: курс лекций.* Москва : Макс Пресс, 2016.
- [13] [Электронный ресурс] *MATLAB documentation.*
URL: <https://uk.mathworks.com/help/matlab/index.html>
- [14] Дьяконов В. П. *MATLAB. Полный самоучитель.* ДМК Пресс, 2012.

Научное издание

**Гаврилов Олег Алексеевич
Владимиров Игорь Викторович
Багров Андрей Дмитриевич**

**МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
СО СПЕЦИАЛЬНЫМ
НЕЛОКАЛЬНЫМ
УСЛОВИЕМ**

Монография

Публикуется в авторской редакции

Подписано к использованию 12.08.2022 г.

Объем данных — 8,04 Мб.

Сист. требования: Adobe Reader.

Издательский дом «Сциентиа»
г. Санкт-Петербург, пер. Дегтярный, д. 22, литер А
Тел. +7 (812) 649-93-76
www.scientia-pub.org
info@scientia-pub.org